Exámenes de Selectividad

Física. Comunidad Valenciana 2022, Ordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Deduce razonadamente la expresión de la velocidad de un satélite que gira alrededor de un planeta en una órbita circular y también la de la velocidad mínima necesaria para que se aleje indefinidamente desde la órbita en la que se encuentra. Supongamos que un satélite orbita a una distancia r de un planeta y se propulsa instantáneamente, de forma que su velocidad pasa a ser 1,5 veces la velocidad orbital, ¿continuará dicho planeta en alguna órbita o se alejará indefinidamente del planeta? Justifica la respuesta.

Solución:

Primero, deducimos la expresión de la velocidad orbital de un satélite que gira alrededor de un planeta en una órbita circular. La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v_{\text{orb}}^2}{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal ($G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$),
- M es la masa del planeta,
- m es la masa del satélite,
- r es la distancia entre el satélite y el centro del planeta,
- v_{orb} es la velocidad orbital del satélite.

Despejando v_{orb}:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Esta es la expresión de la velocidad orbital de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta.

Ahora, deducimos la expresión de la velocidad mínima necesaria para que el satélite se aleje indefinidamente desde la órbita en la que se encuentra, es decir, la *velocidad de escape*. La energía potencial gravitatoria a una distancia r es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

La energía cinética necesaria es:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{esc}}^2.$$

En el infinito, la energía potencial y cinética son cero:

$$E_p(\infty) = 0, \quad E_c(\infty) = 0.$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_p(r) + E_c(r) = E_p(\infty) + E_c(\infty) \quad \Rightarrow \quad -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{esc}}^2 = 0 + 0.$$

Despejando v_{esc}:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{esc}}^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}}^2 = \frac{2G \cdot M}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}.$$

Esta es la expresión de la velocidad de escape desde una distancia r.

Ahora, consideramos que el satélite incrementa instantáneamente su velocidad a:

$$v = 1{,}5 \cdot v_{\text{orb}}.$$

Queremos determinar si con esta nueva velocidad el satélite continuará en alguna órbita o se alejará indefinidamente del planeta. Compararemos la nueva velocidad del satélite con la velocidad de escape:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5 \cdot v_{\text{orb}}}{v_{\text{esc}}}.$$

Sustituyendo las expresiones de v_{orb} y v_{esc}:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}{\sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}}.$$

Simplificando:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{2}}.$$

Calculando el valor numérico:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5}{1{,}4142} \approx 1{,}0607.$$

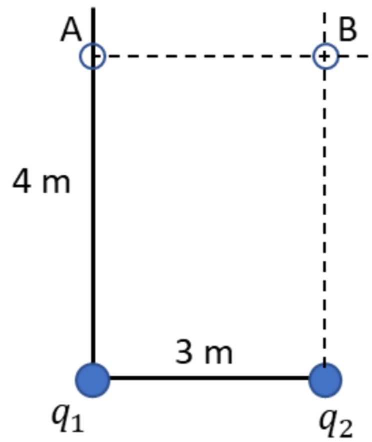
Como $\frac{v}{v_{\text{esc}}} > 1$, la velocidad del satélite es mayor que la velocidad de escape.

Por lo tanto, la velocidad orbital es $v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$, la velocidad de escape es $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}$ y el satélite se alejará indefinidamente del planeta.

Cuestión 2. Campo Electromagnético

El potencial eléctrico en el punto A de la figura es nulo y $q_2 = 1$ nC. Determina el valor de la carga q_1 y el potencial eléctrico en el punto B.

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N·m^2 C^{-2}



Solución:

Primero, recordemos que el potencial eléctrico generado por una carga puntual q a una distancia r viene dado por:

$$V = k \cdot \frac{q}{r},$$

donde:

- V es el potencial eléctrico en voltios (V),
- k es la constante de Coulomb ($k = 9 \cdot 10^9$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ C^{-2}),
- q es la carga eléctrica en culombios (C),
- r es la distancia en metros (m) desde la carga al punto donde se mide el potencial.

Aplicando el principio de superposición, el potencial en el punto A es la suma de los potenciales generados por q_1 y q_2:

$$V_A = V_{q1A} + V_{q2A} = 0 \quad \Rightarrow \quad k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2A}} = 0.$$

Despejando q_1:

$$k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}} = -k \cdot \frac{q_2}{r_{2A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{r_{1A}} = -\frac{q_2}{r_{2A}} \quad \Rightarrow \quad q_1 = -q_2 \cdot \frac{r_{1A}}{r_{2A}}.$$

Calculamos las distancias r_{1A} y r_{2A}:

- La distancia de q_1 al punto A es $r_{1A} = 4$ m.
- La distancia de q_2 al punto A se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$r_{2A} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = \sqrt{9 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2} = \sqrt{25 \text{ m}^2} = 5 \text{ m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$q_1 = -q_2 \cdot \frac{r_{1A}}{r_{2A}} = -(1 \text{ nC}) \cdot \frac{4 \text{ m}}{5 \text{ m}} = -(1 \text{ nC}) \cdot 0.8 = -0.8 \text{ nC}.$$

Entonces, el valor de la carga q_1 es -0.8 nC.

Ahora, calculamos el potencial eléctrico en el punto B. Aplicando nuevamente el principio de superposición:

$$V_B = V_{q1B} + V_{q2B}.$$

Calculamos las distancias r_{1B} y r_{2B}:

- La distancia de q_1 al punto B es:

$$r_{1B} = \sqrt{(0\text{ m} - 3\text{ m})^2 + (0\text{ m} - 4\text{ m})^2} = \sqrt{(-3\text{ m})^2 + (-4\text{ m})^2} = \sqrt{9\text{ m}^2 + 16\text{ m}^2} = 5\text{ m}.$$

- La distancia de q_2 al punto B es:

$$r_{2B} = \sqrt{(3\text{ m} - 3\text{ m})^2 + (0\text{ m} - 4\text{ m})^2} = \sqrt{(0\text{ m})^2 + (-4\text{ m})^2} = \sqrt{0\text{ m}^2 + 16\text{ m}^2} = 4\text{ m}.$$

Calculamos cada potencial:

$$V_{q1B} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1B}} = (9 \cdot 10^9\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot \frac{-0.8 \cdot 10^{-9}\text{ C}}{5\text{ m}} = -\frac{7.2\text{ V}}{5} = -1.44\text{ V},$$

$$V_{q2B} = k \cdot \frac{q_2}{r_{2B}} = (9 \cdot 10^9\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}\text{ C}}{4\text{ m}} = \frac{9\text{ V}}{4} = 2.25\text{ V}.$$

Sumamos los potenciales:

$$V_B = V_{q1B} + V_{q2B} = (-1.44\text{ V}) + (2.25\text{ V}) = 0.81\text{ V}.$$

Por lo tanto, el valor de la carga q_1 es -0.8 nC y el potencial eléctrico en el punto B es 0.81 V.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Una partícula cargada entra con velocidad constante $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético uniforme no nulo $\vec{B}$. Escribe qué fuerza aparece sobre la partícula y razona en qué condiciones ésta será nula y en qué condiciones será máxima.

Solución:

La fuerza que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme viene dada por la *fuerza de Lorentz*:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}),$$

donde:

- $\vec{F}$ es la fuerza magnética en newtons (N),
- q es la carga de la partícula en coulombs (C),
- $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula en metros por segundo (m/s),
- $\vec{B}$ es el campo magnético en teslas (T).

El módulo de la fuerza es:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

donde α es el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. La fuerza será *nula* cuando $\sin\alpha = 0$, es decir, cuando:

$$\alpha = 0^\circ \quad \text{o} \quad \alpha = 180^\circ.$$

Esto ocurre cuando la velocidad de la partícula es paralela (0°) o antiparalela (180°) al campo magnético. En estas condiciones, no hay componente perpendicular entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$, por lo que la fuerza magnética es cero:

$$F_{\text{mín}} = q \cdot v \cdot B \cdot \sin 0^\circ = 0,$$

$$F_{\text{mín}} = q \cdot v \cdot B \cdot \sin 180^\circ = 0.$$

La fuerza será *máxima* cuando $\sin\alpha = 1$, es decir, cuando:

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{o} \quad \alpha = 270^\circ.$$

En estos casos, la velocidad de la partícula es perpendicular al campo magnético, y el módulo de la fuerza es máximo:

$$F_{\text{máx}} = q \cdot v \cdot B \cdot \sin 90^\circ = q \cdot v \cdot B,$$

$$F_{\text{máx}} = q \cdot v \cdot B \cdot \sin 270^\circ = q \cdot v \cdot B.$$

Por lo tanto, la fuerza sobre la partícula es máxima cuando su velocidad es perpendicular al campo magnético y es nula cuando es paralela o antiparalela al mismo.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

Por un hilo rectilíneo indefinido circula una corriente uniforme de intensidad I. Escribe la expresión del módulo del vector campo magnético $\vec{B}$ generado por dicha corriente y dibuja razonadamente dicho vector en un punto P situado a una distancia d del hilo. Si el módulo del campo magnético en ese punto es de 100 μT, deduce cuánto valdrá en un punto que se encuentre a una distancia $d/2$ (expresa el resultado en teslas).

Solución:

Aplicamos la *Ley de Biot-Savart* para un hilo rectilíneo indefinido por el cual circula una corriente de intensidad I. El módulo del campo magnético B generado a una distancia r es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r},$$

donde:

- μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T $\cdot$ m/A),
- I es la intensidad de corriente en amperios (A),
- r es la distancia al hilo en metros (m).

Para determinar la dirección del vector campo magnético $\vec{B}$ en un punto P situado a una distancia d del hilo, utilizamos la *regla de la mano derecha*: si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de la corriente I, los dedos se curvan en el sentido del campo magnético $\vec{B}$, formando círculos alrededor del hilo.

Ahora, dado que el campo magnético en el punto a distancia d es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d} = 100\ \mu\text{T}.$$

Queremos calcular el campo magnético B_2 en un punto a distancia $r = d/2$:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot d}.$$

Comparando B_2 con B_1:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\dfrac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot d}}{\dfrac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Entonces,

$$B_2 = 2 \cdot B_1 = 2 \cdot 100\ \mu\text{T} = 200\ \mu\text{T} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{T}.$$

Por lo tanto, el campo magnético en el punto situado a una distancia $d/2$ es de $2 \cdot 10^{-4}$ T.

Cuestión 5. Ondas

Una fuente sonora puntual de potencia $1,26 \cdot 10^{-4}$ W emite uniformemente en todas las direcciones. Calcula la intensidad, I, a 10 m de la fuente. ¿Cuál es el nivel de intensidad sonora en decibelios a dicha distancia de la fuente?-

Dato: intensidad física umbral $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

La intensidad de una onda esférica se define como la potencia por unidad de superficie:

$$I = \frac{P}{S}.$$

Como la fuente sonora emite uniformemente en todas las direcciones, la superficie es la de una esfera de radio r:

$$S = 4\pi \cdot r^2.$$

Por lo tanto, la intensidad a una distancia r es:

$$I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2}.$$

Calculamos la intensidad a $r = 10$ m:

$$I = \frac{1.26 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W}}{4\pi \cdot (10\ \mathrm{m})^2} = 1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}.$$

La expresión del nivel sonoro (en decibelios) en función de la intensidad es:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

- β: nivel sonoro (decibelios, dB),
- I: intensidad del sonido (W/m^2),
- I_0: intensidad umbral de referencia ($I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ W/m^2).

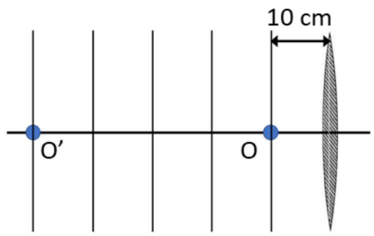
Sustituimos los valores:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}}{1 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 50\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, la intensidad a 10 metros de la fuente es $1 \cdot 10^{-7}$ W/m^2 y el nivel de intensidad sonora a 10 metros de la fuente es de 50 dB.

Cuestión 6. Óptica

En la figura se muestra una lente, la posición de un objeto, O, y la de la imagen, O', que la lente genera de dicho objeto. Determina la distancia focal de la lente, la potencia de la lente en dioptrías y el tamaño de la imagen si el objeto mide 2 cm.



Solución:

Tomamos datos de la figura y utilizamos el criterio de signos DIN (Directo-Inverso-Normal):

- La posición del objeto respecto a la lente es $s = -10$ cm (objeto real a la izquierda de la lente).
- La posición de la imagen respecto a la lente es $s' = -50$ cm (imagen real a la derecha de la lente).
- La altura del objeto es $y = 2$ cm.

La ecuación de las lentes delgadas nos permite calcular la distancia focal f' de esta lente convergente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{1}{-50 \text{ cm}} - \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{25} \text{ cm}^{-1} = \frac{1}{f'}.$$

Despejamos f':

$$f' = \frac{25}{2} \text{ cm} = 12.5 \text{ cm}.$$

La potencia de la lente P es la inversa de la distancia focal expresada en metros:

$$P = \frac{1}{f'(\text{m})} = \frac{1}{0.125 \text{ m}} = 8 \text{ dioptrías}.$$

Para calcular el tamaño de la imagen y', utilizamos la ecuación de la ampliación lateral:

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}.$$

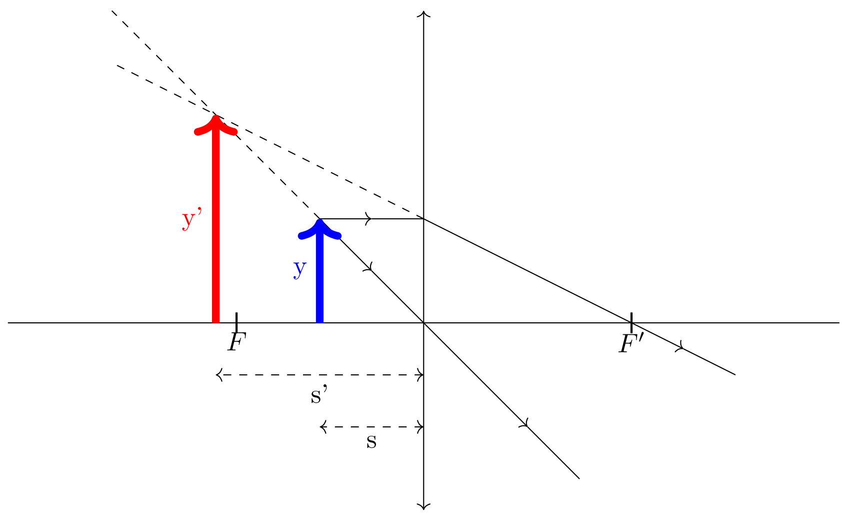
Despejamos y':

$$\frac{y'}{2 \text{ cm}} = \frac{-50 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}}.$$

Calculamos:

$$\frac{y'}{2 \text{ cm}} = 5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5 \cdot 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

El diagrama de rayos es de la forma siguiente:



Por lo tanto, la distancia focal de la lente es 12.5 cm, la potencia es 8 dioptrías y el tamaño de la imagen es 10 cm.

Cuestión 7. Física Moderna

Al iluminar un determinado cátodo con radiación monocromática de frecuencia $f = 6,1{\cdot}10^{14}$ Hz se produce efecto fotoeléctrico. Se mide el valor del potencial de frenado ΔV y resulta $0,23$ V. Calcula el valor de la frecuencia umbral f_0 y determina el metal que constituye el cátodo.

Datos: carga elemental, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; constante de Planck, $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J · s; trabajos de extracción, W_e(potasio) = $2,3$ eV, W_e(aluminio) = $4,3$ eV, W_e(cobre) = $4,7$ eV

Solución:

La energía cinética máxima de los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico está dada por:

$$E_{\text{c,máx}} = h \cdot f - W_e,$$

donde:

- h es la constante de Planck ($h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J · s),
- f es la frecuencia de la radiación incidente ($f = 6.1 \cdot 10^{14}$ Hz),
- W_e es el trabajo de extracción del metal en julios (J).

El potencial de frenado ΔV es el potencial necesario para detener los electrones emitidos, por lo que la energía cinética máxima también puede expresarse como:

$$E_{\text{c,máx}} = q \cdot \Delta V,$$

donde q es la carga elemental ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C). Igualando ambas expresiones:

$$q \cdot \Delta V = h \cdot f - W_e.$$

Despejamos el trabajo de extracción W_e:

$$W_e = h \cdot f - q \cdot \Delta V.$$

Sustituimos los valores:

$$W_e = (6.6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}) \cdot (6.1 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}) - (1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}) \cdot (0.23\ \text{V}) = 3.658 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Calculamos la frecuencia umbral f_0 donde la energía cinética es cero ($E_{\text{c,máx}} = 0$):

$$h \cdot f_0 = W_e.$$

Despejamos f_0:

$$f_0 = \frac{W_e}{h}.$$

Sustituimos los valores:

$$f_0 = \frac{3.658 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6.6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 5.54 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

Ahora, convertimos el trabajo de extracción W_e a electronvoltios (eV) para comparar con los datos:

$$W_e = \frac{3.658 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 2.29\ \text{eV}.$$

Este valor es aproximadamente 2.3 eV, que corresponde al trabajo de extracción del potasio.

Por lo tanto, la frecuencia umbral es $f_0 = 5.54 \cdot 10^{14}$ Hz y el metal que constituye el cátodo es el potasio.

Cuestión 8. Física Moderna

Un núcleo de ^{60}Co se desintegra según la reacción:

$$\mathbf{{}^{60}_{27}Co \rightarrow {}^{60}_{28}Ni^* +^{a}_{b} X.}$$

Razona qué partícula es X. Posteriormente, el núcleo de níquel excitado, $^{60}_{28}$Ni*, emite dos fotones de energías $1,17$ MeV y $1,33$ MeV. Si en un segundo se emiten 10^{10} fotones de cada tipo, calcula la energía por unidad de tiempo (en vatios) que produce la emisión.

Dato: carga elemental, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Solución:

Para determinar la partícula X en la reacción de desintegración del núcleo de ^{60}Co, aplicamos las leyes de conservación del número másico A y del número atómico Z:

$$^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni}^* +^{a}_{b} X.$$

- Conservación del número másico:

$$A_{\text{Co}} = A_{\text{Ni}} + a \quad \Rightarrow \quad 60 = 60 + a \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

- Conservación del número atómico:

$$Z_{\text{Co}} = Z_{\text{Ni}} + b \quad \Rightarrow \quad 27 = 28 + b \quad \Rightarrow \quad b = -1.$$

Dado que $a = 0$ y $b = -1$, la partícula X es un electrón (β^-).

El núcleo de níquel excitado $^{60}_{28}$Ni* emite dos fotones con energías $1,17$ MeV y $1,33$ MeV. Si en un segundo se emiten 10^{10} fotones de cada tipo, calculamos la energía por unidad de tiempo (potencia) producida por la emisión. La energía total emitida por segundo se calcula sumando la energía de ambos tipos de fotones multiplicada por el número de fotones emitidos:

$$P = E_{\text{total}} = N_A \cdot E_A + N_B \cdot E_B,$$

donde:

- $N_A = 10^{10}$ fotones de energía $E_A = 1,17$ MeV,
- $N_B = 10^{10}$ fotones de energía $E_B = 1,33$ MeV.

Sustituyendo los valores:

$$P = E_{\text{total}} = 10^{10} \cdot 1,17 \text{ MeV} + 10^{10} \cdot 1,33 \text{ MeV} = (1,17 + 1,33) \cdot 10^{10} \text{ MeV} = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ MeV}.$$

Ahora, convertimos la energía total a julios (J) para obtener la potencia en vatios (W). Sabemos que:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{y} \quad 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}.$$

Entonces,

$$1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Sustituyendo en la energía total:

$$P = E_{\text{total}} = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ MeV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J/s} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ W} \quad \Rightarrow \quad P = 4 \cdot 10^{-3} \text{ W}.$$

Por lo tanto, la partícula emitida es un electrón y la energía por unidad de tiempo que produce la emisión es $4 \cdot 10^{-3}$ W.

Problema 1. Campo Gravitatorio

Un planeta de radio $R_P = 5000$ km que tiene una intensa actividad volcánica, emite fragmentos en las erupciones que pueden llegar a orbitar circularmente a una altura $h = 400$ km, donde el campo gravitatorio del planeta vale $g = 7$ m/s^2.

a) **Deduce las expresiones de la velocidad orbital y de la energía mecánica de un fragmento de masa $m = 2$ kg que se encuentra en dicha órbita y calcula también sus valores numéricos.**

b) **Calcula el campo gravitatorio en la superficie del planeta y la velocidad con la que el fragmento ha sido emitido desde dicha superficie.**

Solución:

a) **Deduce las expresiones de la velocidad orbital y de la energía mecánica de un fragmento de masa $m = 2$ kg que se encuentra en dicha órbita y calcula también sus valores numéricos.**

Consideremos un planeta de radio $R_P = 5000 \text{ km} = 5 \cdot 10^6$ m con una aceleración gravitatoria en la órbita de $g = 7$ m/s^2. Los fragmentos emitidos tienen una masa $m = 2$ kg y orbitan a una altura $h = 400 \text{ km} = 4 \cdot 10^5$ m sobre la superficie del planeta.

La velocidad orbital v_{orb} de un fragmento en una órbita circular está dada por la relación entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v_{\text{orb}}^2}{r} = m \cdot g,$$

donde:
- m es la masa del fragmento (2 kg),
- v_{orb} es la velocidad orbital,
- $r = R_P + h = 5 \cdot 10^6 \text{ m} + 4 \cdot 10^5 \text{ m} = 5,4 \cdot 10^6$ m es la distancia desde el centro del planeta hasta el fragmento,
- g es la aceleración gravitatoria en la órbita (7 m/s^2).

Simplificando la ecuación:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{7 \text{ m/s}^2 \cdot 5,4 \cdot 10^6 \text{ m}} = \sqrt{37,8 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 6147 \text{ m/s}.$$

La energía mecánica total E_m de un fragmento en órbita circular es la suma de su energía cinética E_c y su energía potencial gravitatoria E_p:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - \frac{G M_P m}{r}.$$

Sin embargo, utilizando la relación $g = \frac{GM_P}{r^2}$, podemos expresar GM_P en función de g y R_P:

$$GM_P = g \cdot r^2.$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - \frac{g \cdot r^2 \cdot m}{r}.$$

Sabemos que $v_{\text{orb}}^2 = g \cdot r$, por lo que:

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot r - \frac{g \cdot r^2 \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot r - g \cdot m \cdot r = -\frac{1}{2} m \cdot g \cdot r.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 7 \text{ m/s}^2 \cdot 5,4 \cdot 10^6 \text{ m} = -3,78 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del fragmento es 6147 m/s y su energía mecánica es $\boldsymbol{E_m = -3,78 \cdot 10^7}$ J.

b) **Calcula el campo gravitatorio en la superficie del planeta y la velocidad con la que el fragmento ha sido emitido desde dicha superficie.**

La aceleración gravitatoria en la superficie del planeta g_0 está relacionada con la aceleración gravitatoria en la órbita g por:

$$g = \frac{GM_P}{r^2} \quad \text{y} \quad g_0 = \frac{GM_P}{R_P^2}.$$

Entonces,

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_P^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g_0 = g \cdot \left(\frac{r}{R_P}\right)^2$$

Sustituyendo los valores:

$$g_0 = 7 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{5,4 \cdot 10^6 \text{ m}}{5 \cdot 10^6 \text{ m}}\right)^2 = 8,16 \text{ m/s}^2.$$

Para calcular la velocidad con la que el fragmento debe ser emitido desde la superficie del planeta v_e, consideramos la conservación de la energía mecánica. Al emitir el fragmento desde la superficie con velocidad v_e, su energía mecánica en la superficie es:

$$E_{\text{superficie}} = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_P m}{R_P}.$$

En la órbita, la energía mecánica es:

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{1}{2}mgr.$$

Igualando las energías (asumiendo que no hay pérdida de energía durante el trayecto):

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_P m}{R_P} = -\frac{1}{2}mgr.$$

Simplificando y despejando v_e:

$$\frac{1}{2}v_e^2 - \frac{GM_P}{R_P} = -\frac{1}{2}gr \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_e^2 = \frac{GM_P}{R_P} - \frac{1}{2}gr.$$

Utilizando $GM_P = g \cdot r^2$:

$$\frac{1}{2}v_e^2 = \frac{g \cdot r^2}{R_P} - \frac{1}{2}gr \quad \Rightarrow \quad v_e^2 = 2 \cdot \frac{g \cdot r^2}{R_P} - gr.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$v_e^2 = 2 \cdot 7 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{(5,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{5 \cdot 10^6 \text{ m}} - 7 \text{ m/s}^2 \cdot 5,4 \cdot 10^6 \text{ m} = 43,848 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \Rightarrow \quad v_e = 6621,78 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio en la superficie del planeta es $\boldsymbol{8,16}$ m/s^2 y la velocidad con la que el fragmento ha sido emitido desde dicha superficie es $\boldsymbol{6621,78}$ m/s.

Problema 2. Campo Electromagnético

Una carga puntual fija $q_1 = 10^{-9}$ C se encuentra situada a 1 m de otra carga puntual fija $q_2 = -2q_1$.

a) **Determina el punto de la recta que contiene las cargas en el cual el campo eléctrico es nulo.**
b) **Un protón con velocidad inicial nula se deja libre entre q_1 y q_2, a 90 cm de q_2. Determina la diferencia de energía potencial del protón entre el punto inicial y un punto situado a 10 cm de q_2. ¿Qué velocidad tendrá el protón cuando alcance este último punto?**

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N·m^2 C^{-2}; masa del protón, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; carga del protón, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Solución:

a) **Determina el punto de la recta que contiene las cargas en el cual el campo eléctrico es nulo.**

Tenemos dos cargas puntuales:
- $q_1 = 1 \cdot 10^{-9}$ C, ubicada en el origen ($x = 0$).
- $q_2 = -2q_1 = -2 \cdot 10^{-9}$ C, ubicada a $d = 1$ m de q_1 ($x = 1$ m).

Buscamos el punto en la recta donde el campo eléctrico total es nulo. El campo eléctrico debido a una carga puntual es:

$$E = k \cdot \frac{|q|}{r^2},$$

donde:
- E es el campo eléctrico en newtons por coulomb (N/C),
- $k = 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$ es la constante de Coulomb,
- q es la carga en coulombs (C),
- r es la distancia desde la carga al punto considerado en metros (m).

Consideremos un punto a una distancia x a la izquierda de q_1 ($x < 0$ m). La distancia desde q_1 es $r_1 = x$ y desde q_2 es $r_2 = x + 1$. Los campos eléctricos en ese punto son:

$$E_1 = k \cdot \frac{|q_1|}{x^2} \quad \text{(dirección negativa, alejándose de } q_1\text{)},$$

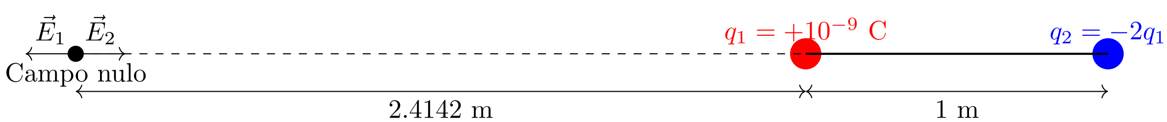
$$E_2 = k \cdot \frac{|q_2|}{(x+1)^2} \quad \text{(dirección hacia } q_2 \text{ ya que } q_2 \text{ es negativa)}.$$

Para que el campo eléctrico total sea nulo:

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad k \cdot \frac{|q_1|}{x^2} = k \cdot \frac{|q_2|}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|q_1|}{x^2} = \frac{|q_2|}{(x+1)^2}.$$

Como $|q_2| = 2|q_1|$:

$$\frac{|q_1|}{x^2} = \frac{2|q_1|}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{x-1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1}{1-\sqrt{2}} = 2{,}4142 \text{ m}.$$



Por lo tanto, el punto donde el campo eléctrico es nulo está a 2,4142 m a la izquierda de q_1 y a 3,4142 m de la carga q_2.

b) Un protón con velocidad inicial nula se deja libre entre q_1 y q_2, a 90 cm de q_2. Determina la diferencia de energía potencial del protón entre el punto inicial y un punto situado a 10 cm de q_2. ¿Qué velocidad tendrá el protón cuando alcance este último punto?

Calculamos las distancias:

- Distancia inicial a q_2: $r_{2i} = 90 \text{ cm} = 0{,}9 \text{ m}$,
- Distancia inicial a q_1: $r_{1i} = 1 \text{ m} - 0{,}9 \text{ m} = 0{,}1 \text{ m}$,
- Distancia final a q_2: $r_{2f} = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}$,
- Distancia final a q_1: $r_{1f} = 1 \text{ m} - 0{,}1 \text{ m} = 0{,}9 \text{ m}$.

Calculamos el potencial eléctrico en el punto inicial (A):

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1i}} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2i}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0{,}1 \text{ m}} + \frac{-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0{,}9 \text{ m}} \right) = 70 \text{ V}.$$

Calculamos el potencial eléctrico en el punto final (B):

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1f}} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2f}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0{,}9 \text{ m}} + \frac{-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0{,}1 \text{ m}} \right) = -170 \text{ V}.$$

Calculamos la diferencia de energía potencial:

$$\Delta E_p = q_p \cdot (V_B - V_A) = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (-170 \text{ V} - 70 \text{ V}) = -3{,}84 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Calculamos la velocidad del protón en el punto final teniendo en cuenta que la energía potencial perdida se transforma en energía cinética:

$$\Delta E_p = -\Delta E_c \quad \Rightarrow \quad -\Delta E_p = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2$$

Despejamos v:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (-\Delta E_p)}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 2{,}145 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la diferencia de energía potencial es $-3{,}84 \cdot 10^{-17}$ J y la velocidad del protón al alcanzar el punto final es $2{,}145 \cdot 10^5$ m/s.

Problema 3. Ondas

La función que representa una onda es $y(x,t) = 2\sin(\pi t - 8\pi x)$, donde x e y están expresadas en metros y t en segundos. Calcula razonadamente:

a) **La amplitud, el periodo, la frecuencia y la longitud de onda.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto situado a 1 m del foco emisor, para $t = 8$ s.**

Solución:

a) **La amplitud, el periodo, la frecuencia y la longitud de onda.**

La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = 2\sin(\pi t - 8\pi x),$$

y la forma general de una onda armónica es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x).$$

Por comparación, identificamos los siguientes parámetros:

- *Amplitud (A)*:

$$A = 2 \text{ m}.$$

- *Frecuencia angular (ω)*:

$$\omega = \pi \text{ rad/s}.$$

- *Número de onda (k)*:

$$k = 8\pi \text{ rad/m}.$$

Ahora, calculamos las magnitudes pedidas:

- *Periodo (T)*:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}.$$

- *Frecuencia (f)*:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0,5 \text{ Hz}.$$

- **Longitud de onda (λ)**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \text{ m} = 0,25 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la amplitud es 2 m, el periodo es 2 s, la frecuencia es $0,5$ Hz y la longitud de onda es $0,25$ m.

b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto situado a 1 m del foco emisor, para $t = 8$ s.**

La velocidad de propagación de una onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,25 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 0,125 \text{ m/s}.$$

La velocidad de vibración es la derivada parcial de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x).$$

Sustituimos los valores:

$$v_y = 2 \text{ m} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos\left(\pi \text{ rad/s} \cdot 8 \text{ s} - 8\pi \text{ rad/m} \cdot 1 \text{ m}\right) = 2\pi \text{ m/s} = 6,2832 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación es $\mathbf{0,125}$ m/s y la velocidad de vibración en $\boldsymbol{x = 1}$ m y $\boldsymbol{t = 8}$ s es $\mathbf{6,28}$ m/s.

Problema 4. Física Moderna

El mesón J/ψ tiene una vida media de $7,2 \cdot 10^{-21}$ s en su sistema de referencia y de $1,1 \cdot 10^{-20}$ s cuando se mueve a velocidad relativista respecto a un sistema de referencia ligado al laboratorio. Calcula razonadamente:

a) **El valor de la velocidad respecto al laboratorio.**
b) **La energía cinética y la energía total, en MeV, en ambos sistemas de referencia.**

Datos: masa (en reposo) del mesón J/ψ, $m_0 = 5,52 \cdot 10^{-27}$ kg; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; carga elemental, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Solución:

a) **El valor de la velocidad respecto al laboratorio.**

Nos encontramos ante la *dilatación del tiempo.* La relación entre el tiempo propio (Δt_0) y el tiempo medido en el laboratorio (Δt) es:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0,$$

donde γ es el factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1,1 \cdot 10^{-20}\ \text{s}}{7,2 \cdot 10^{-21}\ \text{s}} = 1,5278.$$

Ahora, despejamos v de la expresión del factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}.$$

Sustituimos el valor de γ:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1,5278)^2}} = 0,7560.$$

Entonces, la velocidad del mesón es:

$$v = 0,7560 \cdot c = 0,7560 \cdot 3,0 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 2,268 \cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad del mesón respecto al laboratorio es $v = 2,268 \cdot 10^8$ m/s.

b) **La energía cinética y la energía total, en MeV, en ambos sistemas de referencia.**

La energía en reposo del mesón es:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 5,52 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (3,0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 4,968 \cdot 10^{-10}\ \text{J}.$$

Convertimos la energía a MeV:

$$1\ \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \Rightarrow 1\ \text{MeV} = 1 \cdot 10^6\ \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \Rightarrow E_0 = \frac{4,968 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{1,6 \cdot 10^{-13}\ \text{J/MeV}} = 3106,25\ \text{MeV}.$$

La energía cinética en reposo es cero:

$$E_{\text{c, reposo}} = 0 \text{ MeV}.$$

En el sistema de referencia del laboratorio, la energía total es:

$$E = \gamma \cdot E_0 = 1,5278 \cdot 3106,25 \text{ MeV} = 4745,66 \text{ MeV}.$$

La energía cinética es:

$$E_c = E - E_0 = 4745,66 \text{ MeV} - 3106,25 \text{ MeV} = 1639,41 \text{ MeV}.$$

Por lo tanto:

– **En el sistema del mesón (reposo):**

$$\boldsymbol{E_0 = 3106,25 \text{ MeV}, \quad E_c = 0 \text{ MeV}.}$$

– **En el sistema del laboratorio:**

$$\boldsymbol{E = 4745,66 \text{ MeV}, \quad E_c = 1639,41 \text{ MeV}.}$$